This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Astron. Obs.
QB
361
.S71
B 50419 3
UNIV. OF MICH.
OCT 29 1906
RECEIVED
STORAGE
C2w5

# SUR L'APPLICATION

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES

AU

## CALCUL DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES

PAR

**ABEL SOUCHON**

DU BUREAU DES LONGITUDES

TOURS

IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

6, RUE GAMBETTA, 6

1905

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Astronomic
Observator
QB
36
.57

62

# DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Digitized by Google

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

Digitized by Google

# SUR L'APPLICATION

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES

AU

# CALCUL DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES

PAR

**ABEL SOUCHON**

DU BUREAU DES LONGITUDES

TOURS

IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

6, RUE GAMBETTA, 6

1905

Digitized by Google

Digitized by Google

QB
361
.S71

DÉDIÉ

À

M. MAURICE LŒWY

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES
L'UN DE NOS PLUS GRANDS ASTRONOMES

Hommage respectueux.

ABEL SOUCHON.

154213

Digitized by Google

Digitized by Google

# SUR L'APPLICATION

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES

AU

# CALCUL DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES

## I

### INTRODUCTION ANALYTIQUE

C'est en quittant le champ de l'algèbre et presque au début de l'analyse intégrale, que l'on rencontre plusieurs espèces de fonctions auxquelles on a donné le nom de *fonctions elliptiques* ou de transcendantes elliptiques. Ces fonctions jouent un rôle important dans toutes les questions qui se rattachent à l'Analyse, à la Mécanique et à l'Astronomie. Nous allons, dans ce Paragraphe, exposer les principales propriétés de ces fonctions et faire connaître l'application qu'on peut en faire au développement de la fonction perturbatrice dans le cas des Planètes.

Considérons, en particulier, la fonction analytique

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}}.$$

Cette fonction, qui est rationnelle, a été l'objet des travaux d'Euler, de Lagrange et de Legendre.

Digitized by Google

Nous désignerons, désormais, par P une fonction rationnelle quelconque de $x$ et par R le radical

$$\sqrt{a + bx + \ldots + ex^4}.$$

Comme ce radical est constant, on pourra toujours donner à P une infinité de valeurs différentes sans qu'il en résulte pour cela un pareil nombre de fonctions correspondantes.

Représentons maintenant par $\Psi(x)\,dx$ une différentielle dans laquelle $\Psi(x)$ est une fonction rationnelle quelconque de $x$ et de

$$\sqrt{a + bx + \ldots + ex^4},$$

fonction que nous avons désignée par R.

Il sera toujours possible, comme Legendre l'a montré, de ramener cette fonction à dépendre simplement de

$$\frac{P\,dx}{R}.$$

Par des approximations successives, on pourra encore réduire l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{R}$$

à une partie algébrique plus une ou plusieurs transcendantes de même forme et de même nature.

Ces transcendantes sont toutes comprises sous la forme générale

$$\int \frac{A' + B' \sin^2 \varphi}{C' + D' \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

A′, B′, C′ et D′ étant des coefficients constants, réels ou imaginaires.

Digitized by Google

Ceci exige une démonstration ou, tout au moins, des éclaircissements que nous allons donner.

Revenons à la différentielle

$$\frac{P dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + \ldots}}$$

qui se ramène aux intégrales

$$\int \frac{dw}{R}, \qquad \int \frac{w^2\, dw}{R^2}, \qquad \ldots;$$

et à d'autres de même espèce.

Le radical R étant

$$\sqrt{(1 \pm p^2 w^2)(1 \pm q^2 w^2)},$$

il est clair que l'expression $\frac{dw}{R}$ se réduira à la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

en faisant $pw = \sin \varphi$ et $\frac{y^2}{p^2} = c$, lorsque $p^2$ et $q^2$ auront le signe négatif, et $pw = \operatorname{tang} \varphi$, $\frac{p^2 - q^2}{p^2} = c^2$, lorsque ce signe sera positif ; $p$ et $q$ sont deux coefficients indéterminés.

Par là, il est facile de voir que les différentielles intégrales $\int \frac{dw}{R}$, etc., que nous avons à considérer sont toutes comprises dans la formule générale

$$\int \frac{A + B \sin^2 \varphi}{C + D \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Cette formule, comme il est aisé de s'en assurer, peut



Digitized by Google

se décomposer de la manière suivante :

$$\Theta \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$
$$+ \Psi \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$
$$+ \Phi \int \frac{d\varphi}{1 + a \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Les trois termes renfermés dans cette expression représentent respectivement les *fonctions elliptiques* ou transcendantes de *première*, *seconde* et *troisième espèce*. On les a appelées ainsi parce que les intégrales de ces fonctions s'expriment par des arcs d'ellipse ou d'hyperbole. Toutes ces transcendantes sont, du reste, comprises dans la formule générale

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$$

où P désigne toujours une fonction rationnelle de $x$ et R un polynôme en $x$ du quatrième degré.

On désigne ordinairement ces fonctions par les notations symboliques

$$P(c, \varphi), \qquad E(c, \varphi), \qquad \Pi(c, a, \varphi),$$

et l'on écrit

$$F(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$
$$E(c, \varphi) = \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$
$$\Pi(c, a, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{1 + a \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

ces intégrales sont censées s'évanouir quand $\varphi = 0$.

Digitized by Google

En posant

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} = \Delta,$$

on aura, sous une forme abrégée,

$$F(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$E(c, \varphi) = \int d\varphi \Delta.$$

$$\Pi(c, a, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{1 + a \sin^2 \varphi} \Delta.$$

L'arc $\varphi$ est ce que l'on nomme l'*amplitude* de la fonction elliptique. Cet arc mesure, en effet, les variations de la fonction dans toute son étendue. La constante $c$, qui est toujours plus petite que l'unité, s'appelle le *module* de la fonction. Quant à la constante $a$, qui n'entre que dans la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi(c, a, \varphi)$, on l'appelle le *paramètre*. Cette constante peut être positive ou négative, réelle ou imaginaire.

Lorsque les intégrales ou fonctions transcendantes représentées par les symboles respectifs :

$$E(c, \varphi) \quad \text{et} \quad \Pi(c, a, \varphi)$$

sont prises entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\pi$ désignant le rapport de la circonférence au diamètre, on dit que ces fonctions sont *complètes*, et pour les distinguer des autres fonctions du même genre, on omet, dans l'écriture, la variable $\varphi$, en sorte que, dans ce cas particulier, les nota-

Digitized by Google

tions de nos trois fonctions sont :

$$P(c), \qquad E(c), \qquad \Pi(c, a).$$

Si l'on fait, pour abréger, $\sqrt{1 - c^2} = b$, on a $b^2 + c^2 = 1$, et $b$ est ce que l'on nomme le *complément du module* $c^2$.

Les fonctions elliptiques de première espèce, qui sont les plus simples, jouissent de propriétés qui ont une connexion bien marquée avec les fonctions logarithmiques et trigonométriques.

Quant aux fonctions de la seconde espèce, elles comprennent des arcs mesurés sur l'ellipse et l'hyperbole. Leurs propriétés sont analogues à celles des fonctions de première espèce, mais elles sont moins simples et moins générales que ces dernières. La fonction de seconde espèce $E(c, \varphi)$ représente, comme on sait, un arc d'ellipse.

NOTE

Deux grands géomètres, d'Alembert et Maclaurin, sont les premiers qui se soient occupés des intégrales qui s'expriment par des arcs d'ellipse ou d'hyperbole. Legendre et Lagrange ont donné, de ces fonctions particulières, une théorie très étendue.

Plus tard, Euler fit une découverte importante dans la théorie des fonctions elliptiques. En comparant les arcs d'une même ellipse à ceux d'une même hyperbole, ce géomètre reconnut que les différentes transcendantes que l'on avait à considérer pouvaient toujours être représentées par deux arcs d'ellipse ou d'hyperbole.

Enfin en 1780, John Lenden, savant géomètre anglais, démontra que tout arc d'hyperbole pouvait être représenté par deux arcs d'ellipse.

Tel était à peu près l'état de l'analyse intégrale à cette époque, lorsque Legendre entreprit de perfectionner, par des méthodes nouvelles, la théorie des fonctions elliptiques, et il y réussit pleinement. Le premier Mémoire qu'il publia sur ce sujet est intitulé : *Mémoire sur la théorie des fonctions elliptiques;* il est daté de 1793. Quelques années après, ce grand géomètre fit paraître son *Traité des fonctions elliptiques* en 3 volumes in-4°, l'un des plus beaux monuments que le génie de l'homme pouvait concevoir.

On doit encore regarder Legendre comme le créateur d'une théorie à

Digitized by Google

laquelle il a donné le nom de théorie des fonctions *ultra-elliptiques*. Ces fonctions sont intimement liées aux fonctions elliptiques ordinaires et jouissent de propriétés analogues. Elles comprennent un nombre indéfini de classes qui se divisent, chacune, en trois espèces de fonctions : les fonctions *ultra-elliptiques* de *première*, *seconde* et *troisième* espèce. Leur réunion constitue une des branches les plus importantes de la théorie des transcendantes.

L'illustre Jacobi a traité aussi sous un jour tout nouveau de la théorie des fonctions elliptiques. Le Mémoire célèbre qui contient ses recherches est intitulé « *Fondamenta novæ theoriæ fonctionum ellipticorum* » (Regiomonti, 1829).

Il faut citer encore Abel, savant géomètre suédois, dont les beaux travaux ont enrichi presque toutes les branches de l'analyse mathématique. Ses recherches se trouvent dans les deux volumes in-4° qui composent ses *œuvres*, et dans différents recueils.

# II

## APPLICATION DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES AU CALCUL DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES

On peut exprimer par des transcendantes elliptiques les coefficients $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ qui sont les valeurs de $\mathfrak{A}^{(0)}$ et de $\mathfrak{A}^{(1)}$ pour $\mu = \frac{1}{2}$ (voyez notre *Traité d'Astronomie théorique*).

On a, d'après l'équation (1), rapportée dans cet Ouvrage :

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\sigma}{\Theta'^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\sigma}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)}},$$

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\sigma}{\Theta'^{\frac{1}{2}}}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0 \frac{\cos\sigma d\sigma}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)}}.$$

Soit $\varphi$ une nouvelle variable liée à $\sigma$ par la relation

$$(1) \qquad \sin(\varphi + \sigma) = \alpha\sin\varphi;$$

Digitized by Google

on aura, en faisant, pour abréger, $\Delta = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}$,

$$(2) \qquad \cos(\varphi + \sigma) = \Delta,$$

et de ces deux équations on déduira par la différentiation

$$d\sigma = \frac{d\varphi}{\Delta}(\alpha \cos\varphi - \Delta).$$

On a d'ailleurs

$$\cos\sigma = \cos(\sigma + \varphi - \varphi) = \Delta \cos\varphi + \alpha \sin^2\varphi,$$

en sorte que

$$\begin{aligned}\Theta' = 1 - 2\alpha \cos\sigma + \alpha^2 &= 1 - 2\alpha\Delta \cos\varphi - 2\alpha^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \\ &= 1 - 2\alpha\Delta \cos\varphi + 2\alpha^2 \cos^2\varphi - \alpha^2.\end{aligned}$$

Mettant cette dernière expression sous la forme

$$1 - 2\alpha\Delta \cos\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi + \Delta^2 - \Delta^2 - \alpha^2,$$

on en conclut

$$\begin{aligned}\Theta' = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 \cos^2\varphi - \Delta^2 + (\alpha \cos\varphi - \Delta)^2 \\ = 1 - \alpha^2 \sin^2\varphi - \Delta^2 + (\alpha \cos\varphi - \Delta)^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de $\Delta$,

$$(3) \qquad \sqrt{\Theta'} = \alpha \cos\varphi - \Delta.$$

Ainsi on a

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{\Theta'}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\cos\sigma}{\sqrt{\Theta'}} d\sigma = \frac{d\varphi}{\Delta} \alpha \sin^2\varphi + \cos\varphi d\varphi = \frac{d\varphi}{\Delta} \frac{(1 - \Delta^2)}{\alpha} + \cos\varphi d\varphi.$$

Digitized by Google

Comme les limites de la nouvelle variable $\varphi$ sont les mêmes, d'après l'équation (1), que celles de $\sigma$, on peut intégrer les valeurs précédentes depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$; et, en remarquant qu'entre ces limites l'intégrale $\int \cos\varphi d\varphi$ est nulle, on obtient pour les expressions de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$:

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}},$$

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\pi d\varphi\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}.$$

Désignons maintenant par $F(\alpha)$ et $E(\alpha)$ les transcendantes ou *fonctions elliptiques complètes* de première et de seconde espèce, qui répondent à l'amplitude $\varphi$ et au module $\alpha$. On a, d'après les définitions de Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, tome I),

$$2F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}},$$

$$2E(\alpha) = \int^\pi d\varphi\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}.$$

On a donc

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}E(\alpha),$$

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi\alpha}[F(\alpha) - E(\alpha)].$$

Cette méthode de déterminer les deux premiers coefficients du développement de $\Theta^{\frac{1}{2}}$ est surtout avantageuse lorsque $\alpha$ est très peu différent de l'unité, car, alors, la méthode des

Digitized by Google

séries fournit pour ces quantités des valeurs peu exactes. Pour toutes les valeurs de $\alpha$, il existe d'ailleurs des tables à l'aide desquelles on peut parvenir très rapidement aux valeurs numériques des transcendantes F ($\alpha$) et E ($\alpha$). Ces tables, construites par Legendre, ont été publiées dans le tome II de son *Traité des fonctions elliptiques.*

Les développements en série des quantités $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2},$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2},$$

qui sont beaucoup plus convergents que ceux de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ peuvent, après quelques transformations bien simples, être ramenés à la forme des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce.

La détermination des quantités $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ se trouve ainsi dépendre de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$.

## III

### INTRODUCTION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DANS LE CALCUL DES INÉGALITÉS SÉCULAIRES ET ANNUELLES DES PETITES PLANÈTES. — APPLICATION A PALLAS ET A CÉRÈS.

Nous allons maintenant faire connaître plusieurs formules importantes qui ont été données par Plana dans le tome X des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, année 1849.

Digitized by Google

Ces formules s'expriment par des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce et s'appliquent au calcul des inégalités séculaires et annuelles des petites planètes.

Nous donnerons plus tard une application numérique de ces formules spéciales, dans le cas de Pallas et de Cérès.

Pour établir ces formules, nous observerons que les coefficients qui déterminent les inégalités séculaires des Planètes et qui sont désignés par C et D à la page 288 du Tome I de la *Mécanique céleste* (nous représenterons ces coefficients par H et I, afin d'éviter la répétition des lettres), sont tels que l'on a :

$$2H(1-\alpha^2)^2 = -\alpha^2\left[2\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} - (1+\alpha^2)\, b^{(1)}_{\frac{1}{2}}\right],$$

$$2I(1-\alpha^2)^2 = \alpha\left[\alpha(1+\alpha_2)\, b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - 2(1-\alpha^2+\alpha^4)\right] b^{(1)}_{\frac{1}{2}},$$

et comme

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} F^{(1)}(\alpha), \qquad \alpha b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\left[F^{(1)}(\alpha) - E^{(1)}(\alpha)\right],$$

il est clair qu'en faisant

$$\zeta = \alpha(1+\alpha^2)\frac{2}{\pi}E^{(1)}(\alpha) - \alpha(1-\alpha^2)\frac{2}{\pi}F^{(1)}(\alpha),$$

$$\zeta' = 2(1-\alpha^2+\alpha^4)\frac{2}{\pi}E^{(1)}(\alpha) - 1 - \alpha^2(2-\alpha^2)\frac{2}{\pi}F^{(1)}(\alpha),$$

on aura

$$H = -\frac{\zeta}{(1-\alpha^2)^2}, \qquad I = \frac{\zeta'}{(1-\alpha^2)^2},$$

expressions qui renferment les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce $F^{(1)}(\alpha)$ et $E^{(1)}(\alpha)$.



Digitized by Google

OCT 24
RECEIVED

Digitized by Google